4. cvičení - teorie

Věta 20 (derivace složené funkce)**.** Nechť $r, s \in \mathbb{N}$ a nechť $G \subset \mathbb{R}^s, H \subset \mathbb{R}^r$ jsou otevřené množiny. Nechť $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in C^1(G), f \in C^1(H)$ a bod $[\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)] \in H$ pro každé $x \in G$. Potom složená funkce $F : G \to \mathbb{R}$ daná předpisem

$$F(x) = f\left(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)\right), x \in G,$$

je třídy C^1 na G. Nechť $a \in G$ a $b = [\varphi_1(a), \dots, \varphi_r(a)]$. Pak pro $j \in \{1, \dots, s\}$ platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_i}(b) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a).$$

Věta 21 (záměnnost parciálních derivací)**.** Nechť $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a funkce f má na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$ obě parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, a tyto funkce jsou v bodě a spojité. Pak platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Věta 22 (o implicitní funkci)**.** Mějme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a bod $[x_0, y_0] \in G$. Uvažujme funkci $F : G \to \mathbb{R}$ splňující:

(i) $F \in C^1(G)$,

(ii) $F(x_0, y_0) = 0$,

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existuje U okolí bodu x_0 (v $\mathbb{R}^n$) a okolí V bodu y_0 (v $\mathbb{R}$) taková, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ splňující $F(x, y) = 0$. Označíme-li tot y jako $\varphi(x)$, pak takto vzniklá funkce $\varphi \in C^1(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}\left(x, \varphi(x)\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, \varphi(x)\right)} \text{ pro } x \in U, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Poznámka. Vždy platí, že $\varphi(x_0) = y_0$.

Definice (Tečná nadrovina)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $a \in G, f \in \mathbb{C}^1(G)$. Pak graf funkce

$$T(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a) \cdot (x_i - a_i)$$

je **tečná nadrovina** fe grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$.

Poznámka (Prohození souřadnic)**.** Chceme-li ukázat, že zadaná rovnost určuje implicitně zadanou funkci jiných proměnných, než obvykle, stačí v postupu prohodit souřadnice. Vizte příklad níže.

Příklad. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 = 1$ určuje na okolí bodu $[1, 0]$ implicitně zadanou funkci φ proměnné y. (nikoli proměnné x).

Postup bude stejný, akorát tam, v postupu prohodíme výskyty F'_x, F'_y - tj. při ověřování *(iii)* ve větě 22 budeme zjišťovat, zda $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$ atd.

Návod

- anulujeme rovnici a nenulovou stranu označíme jako $F(x,y)$, resp. $F(x,y,z)$
- spočteme parciální derivace
- ověříme předpoklady věty 22
- dle věty 22 spočteme $\varphi'_x(x_0,y_0)$, resp. $\varphi'_x(x_0,y_0,z_0), \varphi'_y(x_0,y_0,z_0)$
- dosadíme spočtené do tečné nadroviny z definice

Výpočet druhé derivace φ pomocí řetízkového pravidla (věty 20)

$$\text{Máme } \varphi'(x) = -\frac{F'_x\left(x,\varphi(x)\right)}{F'_y\left(x,\varphi(x)\right)}.$$

Zderivováním podle x dostaneme

$$\varphi''(x) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}F'_x(x,\varphi(x)) \cdot F'_y(x,\varphi(x)) - F'_x(x,\varphi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}F'_y(x,\varphi(x))}{\left(F'_y(x,\varphi(x))\right)^2}.$$

Podle řetízkového pravidla platí následující.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}F'_x(x,\varphi(x)) &= \left(F'_x(x,\varphi(x)\right)'_x \cdot \frac{\partial x}{\partial x}(x) + \left(F'_x(x,\varphi(x)\right)'_y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = \\ &= F''_{x,x}\left(x,\varphi(x)\right) + F''_{x,y}\left(x,\varphi(x)\right) \cdot \varphi'(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}F'_y(x,\varphi(x)) &= \left(F'_y(x,\varphi(x)\right)'_x \cdot \frac{\partial x}{\partial x}(x) + \left(F'_y(x,\varphi(x)\right)'_y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = \\ &= F''_{y,x}\left(x,\varphi(x)\right) + F''_{y,y}\left(x,\varphi(x)\right) \cdot \varphi'(x)\end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že

$$\varphi'' = -\frac{\left(F''_{x,x} + F''_{x,y} \cdot \varphi'\right) \cdot F'_y - F'_x \cdot \left(F''_{y,x} + F''_{y,y} \cdot \varphi'\right)}{\left(F'_y\right)^2},$$

kde F a její derivace vyhodnocujeme v bodě $(x,\varphi(x))$ a φ a její derivace vyhodnocujeme v bodě x.

Věta (Vztah znaménka derivace a monotonie funkce)**.** Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{Int} J$) má derivaci.

(i) Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je rostoucí na J.

(ii) Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je klesající na J.

(iii) Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je neklesající na J.

(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je nerostoucí na J.

Věta (druhá derivace a konvexita)**.** Nechť $a, b \in R^*, a < b$ a f má na intervalu (a, b) vlastní druhou derivaci.

(i) Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b).

(ii) Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b).

(iii) Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b).

(iv) Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konkávní na (a, b).